

## BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

### I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

#### A KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

**Phương trình ẩn  $x$**  là mệnh đề chứa biến có dạng  $f(x) = g(x)$  (1) trong đó  $f(x)$  và  $g(x)$  là những biểu thức của  $x$ . Ta gọi  $f(x)$  là vế trái,  $g(x)$  là vế phải của phương trình (1).

**Điều kiện xác định của phương trình** (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện của ẩn  $x$  để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Nếu  $f(x_0) = g(x_0)$  thì số thực  $x_0$  được gọi là một nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  (1)

**Giải phương trình** (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

Nếu phương trình không có nghiệm nào thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).

#### B PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

##### 1 PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Hai phương trình  $f(x) = g(x)$  (1) và  $f_1(x) = g_1(x)$  (2) được gọi là tương đương nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng)

Kí hiệu  $(1) \Leftrightarrow (2)$ .

##### 2 PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương đã biết sau

- Cộng hoặc trừ cả hai vế với cùng một số hoặc biểu thức.
- Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số hoặc biểu thức khác 0.

**Chú ý.** Các phép biến đổi trên không làm thay đổi điều kiện của phương trình thì mới được phương trình tương đương.

##### 3 PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

Mỗi nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) thì ta nói phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

Kí hiệu:  $(1) \Rightarrow (2)$ .

**Chú ý.**

+ Phép bình phương hai vế một phương trình không phải là phép biến đổi tương đương mà chỉ là phép biến đổi hệ quả.

+ Khi hai vế của phương trình đều không âm, bình phương hai vế của phương trình ta được một phương trình tương đương.

**Công thức**

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

Khi giải phương trình, không phải lúc nào ta cũng áp dụng được phép biến đổi tương đương, trong nhiều trường hợp ta phải thực hiện các phép biến đổi đưa tới phương trình hệ quả, chẳng hạn bình phương hai vế, nhân hai vế của phương trình với một đa thức. Lúc đó để loại nghiệm ngoại lai, ta phải thử lại các nghiệm tìm được.

Ví dụ : a)  $4x - 3 = 2 \Leftrightarrow 4x = 5$

b)  $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$

c)  $\sqrt{x-1} = x \Rightarrow x-1 = x^2$

## C PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số. Nghiệm của một phương trình hai ẩn  $x, y$  là một cặp số thực  $(x_0; y_0)$  thỏa mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình ba ẩn  $x, y, z$  là một bộ số thực  $(x_0; y_0; z_0)$  thỏa mãn phương trình đó.

**Ví dụ 1.** Cho phương trình

$$3x + 2y = x^2 - 2xy + 8 \quad (1)$$

$$4x^2 - xy + 2z = 3z^2 + 2xz + y^2 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn ( $x$  và  $y$ ), còn (3) là phương trình ba ẩn ( $x, y$  và  $z$ ).

Khi  $x = 2, y = 1$  thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp  $(x; y) = (2; 1)$  là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số  $(x; y; z) = (-1; 1; 2)$  là một nghiệm của phương trình (3).

## D PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

# II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

## Dạng 1 : Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Ví dụ: Tìm điều kiện xác định của phương trình

a)  $3 - x^2 = \frac{x}{\sqrt{2-x}}$

Đk :  $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

b)  $\frac{1}{x^2-1} = \sqrt{x+3}$

Đk :  $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$

## Dạng 2: Giải phương trình có điều kiện.

### Phương pháp

Đối với các phương trình có điều kiện (thường là phương trình chứa ẩn trong căn, chứa ẩn ở mẫu,...) khi giải ta thường làm theo các bước sau

- ① Đặt điều kiện cho phương trình.
- ② Chuyển về, đổi dấu hoặc quy đồng và khử mẫu phân thức.
- ③ Rút gọn và giải phương trình nhận được.
- ④ Đối chiếu điều kiện và kết luận.

### Ví dụ 1. Giải phương trình

a)  $\sqrt{x+2} + x^2 = 9 + \sqrt{x+2}$

Giải

Đk :  $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

pt  $\Leftrightarrow x^2 = 9 + \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(\text{nhan}) \\ x = -3(\text{loai}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = 3$

b)  $x + \sqrt{3-x} = \sqrt{x-3} + 3$  (1)

Giải.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Thế  $x = 3$  vào phương trình (1) ta được

$$3 + \sqrt{3-3} = \sqrt{3-3} + 3 \Leftrightarrow 0 = 0 (\text{đúng})$$

Vậy  $x = 3$  là nghiệm của phương trình.

c)  $2x^2 - \sqrt{4-x} = \sqrt{x-5} + 2$

Giải.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

d)  $\frac{x^2}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{\sqrt{x+2}}$  (1)

Giải.

ĐK :  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(\text{nhan}) \\ x = -2(\text{loai}) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm  $x = 2$

e)  $\frac{3x+1}{x-2} - \frac{4-2x}{x-2} - 3 = 0$  (1)

Giải

ĐK :  $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-2} - \frac{4-2x}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 - (4-2x) - 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}(\text{nhan})$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm  $x = -\frac{3}{2}$

### III. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

- a)  $x + \sqrt{x-2} = 4 + \sqrt{x-2}$
- b)  $x^2 + \sqrt{-x+3} = 4 + \sqrt{-x+3}$
- c)  $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$
- d)  $\frac{\sqrt{x-2}}{4-x^2} = x + \sqrt{2-x}$
- e)  $2 - x + \sqrt{x-3} = \sqrt{-x+1}$
- f)  $\frac{3x}{\sqrt{x+5}} = \frac{6x^2}{\sqrt{x+5}}$
- g)  $\frac{-x+3}{\sqrt{-3x}} = \frac{2x^2}{\sqrt{-3x}}$
- h)  $\frac{-8}{\sqrt{x+1}} = \frac{-2x^2}{\sqrt{x+1}}$
- i)  $\frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{x+2}} = 0$
- j)  $\frac{2x^2 + x - 3}{\sqrt{2x-2}} = 5\sqrt{2x-2}$
- k)  $\frac{2x^2 - 5x + 2}{\sqrt{2x-1}} = -6\sqrt{2x-1}$

**Bài 2.** Giải phương trình

- a)  $\frac{2x+2}{2x-1} = x-2$
- b)  $2x-1 = \frac{3-2x}{x+2}$
- c)  $8 - \frac{8x+4}{1+2x} = 5x$
- d)  $1-2x + \frac{3x^2-7x-6}{2x-6} = 0$
- e)  $3 - \frac{2x}{5} - \frac{6x-4}{2-3x} = 0$
- f)  $3x + \frac{77}{2} - \frac{2x^2-x-15}{4x+10} = 0$
- g)  $\frac{x}{4} + 10 = \frac{3x^2+17x+20}{3x+5}$
- h)  $\frac{6x-4}{2-3x} - 2 = -5x$

## IV. TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Tìm tập xác định của phương trình  $\frac{\sqrt{x+1}}{x} + 3x^5 - 2017 = 0$ .

- A.  $[-1; +\infty)$ .      B.  $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$ .      C.  $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$ .      D.  $(-1; +\infty)$ .

**Câu 2.** Điều kiện xác định của phương trình  $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$  là

- A.  $x > -2$  và  $x < \frac{3}{2}$ .      B.  $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ .  
C.  $x > -2$  và  $x \neq 0$ .      D.  $\begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$ .

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Câu 3. | Số nghiệm của phương trình $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là<br>A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.                                                                                                                                                                                                          |
| Câu 4. | Số nghiệm của phương trình $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là:<br>A. 2.      B. 0.      C. 1.      D. 3.                                                                                                                                                                                                                    |
| Câu 5. | Tập nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1$ là<br>A. $S = \mathbb{R}$ .      B. $S = \emptyset$ .      C. $S = \{0\}$ .      D. $S = \{-1\}$ .                                                                                                                                                                               |
| Câu 6. | Phương trình $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ có bao nhiêu nghiệm?<br>A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. 3.                                                                                                                                                                                                                                  |
| Câu 7. | Phép biến đổi nào sau đây là phép biến đổi tương đương?<br>A. $x + \sqrt{x^2 - 2} = x^2 + \sqrt{x^2 - 2} \Leftrightarrow x = x^2$ .      B. $\sqrt{2-x} = x \Leftrightarrow 2-x = x^2$ .<br>C. $x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x = x^2$ .      D. $x + \sqrt{x^2 + 3} = x^2 + \sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow x = x^2$ . |

Câu 8. Chọn câu sai

A.  $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

B.  $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x+1 = 4$

C.  $5x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} + 2 \Leftrightarrow 5x = 2$

D.  $\frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Câu 9. Chọn câu đúng

A.  $(x-3)x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

B.  $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x-1} = 3 \Leftrightarrow 1+x = 3(x-1)$

C.  $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \frac{5}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow x+2 = 5$

D.  $(x+2)(x-3) = x-3 \Leftrightarrow x+2 = 1$

Câu 10.

Để giải phương trình  $|x-2| = 2x-3$  (1), một học sinh đã lập luận như sau:

(I) Bình phương 2 vế: (1)  $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$  (2)

(II)  $\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$  (3).

(III)  $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3}$ .

(IV) Vậy (1) có hai nghiệm  $x_1 = 1$  và  $x_2 = \frac{5}{3}$

Cách giải trên sai từ bước nào?

A. (IV).

B. (II).

C. (III).

D. (I).